В ходе выполнения НИР получены следующие основные результаты.

1. Рассмотрена задача о представлении решения задачи Коши для системы обык­

новенных дифференциальных уравнений (вообще говоря нелинейных) в виде ряда Фу­

рье по полиномам 𝑈 𝑠,𝑙 (𝑦) (𝑙 = 0,1,...), ортонормированным по Соболеву относительно

скалярного произведения < 𝑔,𝑕 >=

∑︀ 𝑠−1

𝜉=0 𝑔

(𝜉) (−1)𝑕 (𝜉) (−1) +

∫︀

1

−1 𝑔

(𝑠) (𝑢)𝑕 (𝑠) (𝑢)𝜍(𝑢)𝑒𝑢, где

𝜍(𝑦) =

2

𝜌 (1 − 𝑦

2 ) − 1

2 , порожденным полиномами Чебышева 𝑈 𝑜 (𝑦) = cos(𝑜arccos𝑦) по­

средством равенств 𝑈 𝑠,𝑙 (𝑦) =

(𝑦+1) 𝑙

𝑙!

(𝑙 = 0,1,...,𝑠 − 1), 𝑈 𝑠,𝑠 (𝑦) =

(𝑦+1) 𝑠

√ 2𝑠! ,

𝑈 𝑠,𝑠+𝑜 (𝑦) =

1

(𝑠−1)!

∫︀

𝑦

−1 (𝑦 − 𝑢)

𝑠−1 𝑈 𝑜 𝑒𝑢 (𝑜 = 1,...). В бесконечномерном гильбертовом пространстве 𝑚 𝑛

2

𝑛-мерных последовательностей 𝐷 = (𝑑 0 ,𝑑 1 ,...), для которых определена норма ‖𝐷‖ =

(︁ ∑︀

∞

𝑘=0

∑︀ 𝑛

𝑚=1 (𝑑

𝑚

𝑘 )

2 )︁

1

2

, сконструирован сжимающий нелинейный оператор 𝐵 : 𝑚 𝑛

2

→ 𝑚 𝑛

2

,

неподвижная точка

^

𝐷 = (^ 𝑑 0 ,^ 𝑑 1 ,...) которого совпадает с последовательностью искомых

неизвестных коэффициентов разложения решения рассматриваемой задачи Коши в ряд

Фурье по системе 𝑈 1,𝑙 (𝑦) (𝑙 = 0,1,...). Сконструирован также соотвествующий конеч­

номерный аналог 𝐵 𝑂 : R 𝑂

𝑛

→ R 𝑂

𝑛

оператора 𝐵, который действует в конечномерном

пространстве R 𝑂

𝑛

матриц 𝐷 размерности 𝑛 × 𝑂, в котором определена норма ‖𝐷‖ 𝑛

𝑂

=

(︁ ∑︀

𝑂−1

𝑘=0

∑︀ 𝑛

𝑚=1 (𝑑

𝑚

𝑘 )

2 )︁

1

2

. Неподвижная точка

¯

𝐷 = (¯ 𝑑 0 ,¯ 𝑑 1 ,...,¯ 𝑑 𝑂−1 ) оператора 𝐵 𝑂 представ­

ляет собой оценку (приближенное значение) искомой точки

^

𝐷 𝑂 = (^ 𝑑 0 ,^ 𝑑 1 ,...,^ 𝑑 𝑂−1 ).

Установлена оценка погрешности ‖ ^ 𝐷 𝑂 −

¯

𝐷 𝑂 ‖ 𝑛

𝑂 . Рассмотрены задачи о приближении

дифференцируемых и аналитических функций суммами Фурье по полиномам 𝑈 1,𝑙 (𝑦)

(𝑙 = 0,1,...), ортогональным относительно указанного скалярного произведения.

2. Рассмотрена система функций 𝜊 0 (𝑦) = 1,{𝜊 𝑜 (𝑦) =

√ 2cos(𝜌𝑜𝑦)} ∞

𝑜=1

и порожден­

ная ею система

𝜊 1,0 (𝑦) = 1,𝜊 1,1 (𝑦) = 𝑦,𝜊 1,𝑜+1 (𝑦) =

∫︁

𝑦

0

𝜊 𝑜 (𝑢)𝑒𝑢 =

√ 2

𝜌𝑜

sin(𝜌𝑜𝑦),𝑜 = 1,2,...,

которая является ортонормированной по Соболеву относительно скалярного произве­

дения вида ⟨𝑔,𝑕⟩ = 𝑔 ′ (0)𝑕 ′ (0) +

∫︀

1

0

𝑔 ′ (𝑢)𝑕 ′ (𝑢)𝑒𝑢. Показано, что ряды и суммы Фурье по

системе {𝜊 1,𝑜 (𝑦)} ∞

𝑜=0

является удобным и весьма эффективным инструментом прибли­

женного решения задачи Коши для систем нелинейных обыкновенных дифференциаль­

ных уравнений (ОДУ).

3. Рассмотрена система функций 𝜇 𝛽

𝑠,𝑜 (𝑦) (𝑠 ∈ N, 𝑜 = 0,1,...), ортонормирован­

ная при 𝛽 > −1 относительно скалярного произведения типа Соболева следующего

вида ⟨𝑔,𝑕⟩ =

∑︀ 𝑠−1

𝜉=0 𝑔

(𝜉) (0)𝑕 (𝜉) (0) +

∫︀

∞

0

𝑔 (𝑠) (𝑦)𝑕 (𝑠) (𝑦)𝑒𝑦 и порождённая ортонормирован­

ными функциями Лагерра. Показано, что ряд Фурье по системе {𝜇 𝛽

𝑠,𝑜 (𝑦)}

∞

𝑙=0

при 𝛽 > 0

сходится равномерно относительно 𝑦 ∈ [0,𝐵], 𝐵 > 0, к функции 𝑔 ∈ 𝑋 𝑠

𝑀 𝑞

для

4

3

< 𝑞 < 4.

Для системы функций 𝜇 𝛽

𝑠,𝑜 (𝑦) получены рекуррентные соотношения. Кроме того, иссле­

дованы асимптотические свойства функций 𝜇 0

1,𝑜 (𝑦) при 0 6 𝑦 6 𝜕, где 𝜕 – некоторое

фиксированное положительное число.

59

4. Изучены свойства функций из ортогональной по Соболеву системы W 𝑠 , порож­

денной системой Уолша. В частности, получены рекуррентные соотношения для функ­

ций из W 1 . Доказана равномерная сходимость рядов Фурье по системе W 𝑠 к функциям

𝑔 из пространств Соболева 𝑋 𝑠

𝑀 𝑞 , 𝑞 ≥ 1, 𝑠 = 1,2,....

5. Введено понятие решения задачи Коши для системы ОДУ вида 𝑧 ′ (𝑦) = 𝑔(𝑦,𝑧),

𝑧(0) = 𝑧 0 , 0 ≤ 𝑦 ≤ 1, в которой правая часть 𝑔 = (𝑔 1 ,...,𝑔 𝑛 ) необязательно непрерывна

в области своего определения 𝐻 ⊂ R 𝑛+1 . Рассмотрены вопросы существования и един­

ственности решения задачи Коши. Для того чтобы определить понятие решения задачи

Коши, введен класс 𝐵𝐷 𝑛 [0,1], состоящий из всех абсолютно непрерывных вектор-функ­

ций 𝑧 = 𝑧(𝑦) = (𝑧 1 (𝑦),...,𝑧 𝑛 (𝑦)), заданных на [0,1]. Вектор-функция 𝑧 ∈ 𝐵𝐷 𝑛 [0,1]

называется решением задачи Коши, если выполнено начальное условие 𝑧(0) = 𝑧 0 и име­

ет место равенство 𝑧 ′ (𝑦) = 𝑔(𝑦,𝑧(𝑦)) для почти всех 𝑦 ∈ [0,1]. При изучении вопросов,

связанных с существованием и единственностью задачи Коши в смысле приведенного

определения, ключевую роль сыграли системы функций, ортонормированные по Со­

болеву и порожденные заданной системой {𝜙 𝑙 (𝑦)} ∞

𝑙=0 , ортонормированной в весовом

пространстве Лебега 𝑀 2

𝜍 (0,1) с весом 𝜍 = 𝜍(𝑦)